



Aufgabe 1: Absorptionsgesetze

Leiten Sie aus den Gesetzen der Booleschen Algebra vier weitere Absorptionsgesetze her. Geben Sie für jeden Umformungsschritt an, welches Gesetz Sie angewendet haben.

- $xy \vee x-y = x$
- $(x \vee -y)y = xy$
- $x-y \vee y = x \vee y$
- $(x \vee y)(x \vee -y) = x$

Aufgabe 2: Äquivalenz Boolescher Ausdrücke

Zeigen Sie, durch Anwendung der Regeln der Booleschen Algebra, welche der folgenden Ausdrücke äquivalent sind. Sind zwei Ausdrücke nicht äquivalent, geben Sie ein Gegenbeispiel an und zeigen durch Auswertung, dass beide Ausdrücke verschiedene Funktionen realisieren.

- $ac \vee -a-c-d \vee b-cd$
- $c(d \vee b)$
- $acd \vee bc-d \vee bcd \vee -acd$

Aufgabe 3: Äquivalenz und Antivalenz

Leiten Sie aus den Gesetzen der Booleschen Algebra die folgenden Rechenregeln für den Äquivalenzoperator \Leftrightarrow und XOR-Operator \oplus her:

- $-x \Leftrightarrow y = x \oplus y$
- $-x \Leftrightarrow -y = x \Leftrightarrow y$
- $xz \oplus yz = (x \oplus y) \wedge z$
- $(x \vee z) \Leftrightarrow (y \vee z) = (x \Leftrightarrow y) \vee z$

Aufgabe 4: Vereinfachung von Ausdrücken

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

- $(a \oplus b) (a-b \vee b)$
- $(a \Leftrightarrow b) \vee b \vee (a \oplus b)$
- $abc \vee -abc \vee ab-c \vee -ab-c$
- $((a \oplus b) \wedge c) \Leftrightarrow b \vee c$

Aufgabe 5: NAND und NOR

- Zeigen Sie, dass der NAND-Operator ein vollständiges Operatorensystem bildet. Ein vollständiges Operatorensystem ist eine Menge von Operatoren, mit denen sich alle Booleschen Funktionen darstellen lassen. Beachten Sie, dass \neg , \wedge und \vee ein vollständiges Operatorensystem bilden und Sie den Beweis führen können, indem Sie zeigen, dass sich \neg , \wedge und \vee jeweils durch den NAND-Operator ausdrücken lassen.
- Zeigen Sie, dass der NOR-Operator alleine ebenfalls ein vollständiges Operatorensystem bildet.
- Zeigen Sie, dass für die Booleschen Operationen NAND und NOR das Assoziativitätsgesetz nicht gilt und deshalb Klammern nicht einfach weggelassen werden dürfen.

Aufgabe 6: Ampelanlage

Für eine Ampelanlage mit zwei Signalgruppen seien folgende Signalbezeichnungen festgelegt:

Signalgruppe I:

| | | | |
|--------------|------|------|------|
| Lichtsignal: | ROT | GELB | GRÜN |
| Steuerung: | Q0=1 | Q1=1 | Q2=1 |

Signalgruppe II:

| | | | |
|--------------|------|------|------|
| Lichtsignal: | ROT | GELB | GRÜN |
| Steuerung: | Q5=1 | Q6=1 | Q7=1 |

Die Signalfolge einer Ampel ist Rot, Rot-Gelb, Grün, Gelb, Rot. Die Ampeln werden in einem bestimmten Zeittakt von einem Taktgeber geschaltet. Der Taktgeber ist ein Dualzähler. Zum Zeitpunkt 0 steht die Signalgruppe I auf Rot und die Signalgruppe II auf Grün. Rot und Grün alleine bleiben drei Zeittakte stehen. Rot und Gelb leuchten zusammen einen Zeittakt, Gelb alleine ebenfalls nur einen einzigen Takt.

- Ersetzen Sie den Dualzähler durch drei Eingangsvariablen A, B, und C und stellen Sie eine Funktionstabelle auf.
- Erstellen Sie ein Signal-Zeit Diagramm und tragen Sie die Signalwerte Q0 – Q7 für die ersten 8 Takte ein.